

## STUDIA METODOLOGICZNE

**Piotr SULEWSKI**

### Modyfikacja testu niezależności

---

Tablica dwudzielcza jest podstawowym i często stosowanym narzędziem statystycznym do badania siły związku między cechami typu jakościowego. Na podstawie analizy trudno jest uzyskać informacje na temat wykrywania związku między cechami w tablicy dwudzielczej oraz ocenić, na ile czułym jest ona narzędziem. Jedyny sposób osiągnięcia tego celu stanowi generowanie tablic dwudzielczych oraz badania symulacyjne. Tworzenie tablic dwudzielczych, gdy nie ma związku między badanymi cechami, jest rzeczą prostą, gdyż w takiej sytuacji można skorzystać z generatorów liczb równomiernych i generować niezależnie przynależność do wiersza i kolumny. Zadaniem niewątpliwie trudniejszym wydaje się tworzenie tablic dwudzielczych w sytuacji, gdy zachodzi związek między cechami.

Procedurę generowania tablic dwudzielczych z zadaniem związku między badanymi cechami z wykorzystaniem dwuwymiarowego rozkładu normalnego, a także opis generatora liczb losowych o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym przedstawiono w pracy Sulewskiego (2006). Jednak metoda ta stosowana do tablic dwudzielczych o większych wymiarach ma wadę, gdyż w narożach tablicy pojawiają się komórki puste lub komórki z małą liczbą realizacji.

Z tego powodu w późniejszym opracowaniu Sulewskiego (2007) zaproponowano metodę generowania tablic dwudzielczych o wymiarach  $(w \times k)$ , określoną przez Autora metodą „słupkową”. Wykorzystując implementację komputerową testu niezależności dwóch cech opisaną w pracy P. Sulewskiego (2006), zbadano zdolność tablicy dwudzielczej do wykrywania związku między badanymi cechami oraz obliczono jego siłę wykorzystując współczynnik Cramera. Porównano rze-

czywisty rozkład miary rozbieżności tablic dwudzielczych z rozkładem teoretycznym, jakim jest rozkład chi-kwadrat o  $(w-1)(k-1)$  stopniach swobody. Badania pokazały, że jeżeli hipoteza zerowa o braku związku między cechami jest słuszna, to niezależnie od rozmiaru tablicy zachodzi zgodność między rzeczywistym rozkładem miary rozbieżności tablic dwudzielczych a rozkładem teoretycznym.

Godny uwagi jest fakt, że współczynnik Cramera rośnie wraz ze zwiększaniem się rozmiaru tablicy, nawet wówczas gdy hipoteza zerowa o braku związku między rozpatrywanymi cechami jest słuszna.

W części pierwszej, wykorzystując metodę „słupkową”, zaproponowano modyfikację testu niezależności dwóch cech polegającą na zastosowaniu statystyki nazwanej „modułową” jako miary rozbieżności pomiędzy rozkładem zaobserwowanym a hipotetycznym.

W rozdziale drugim tego opracowania dla proponowanej statystyki modułowej podano wartości krytyczne  $|\chi|_\alpha$  według różnej liczebności próby na poziomie istotności  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$  dla tablic  $u \times u$  ( $u = 2, 3, 4$ ) oraz  $t \times 2$  ( $t = 4, 8$ ).

W części trzeciej zbadano zdolność tablicy dwudzielczej do wykrywania związku między cechami, określaną jako moc testu oraz porównano uzyskane wyniki z mocą testu niezależności wykorzystującego statystykę  $\chi^2$  z  $(k-1)(w-1)$  stopniami swobody.

W części ostatniej dokonano sprawdzenia, czy rozkład omawianych w pracy miar rozbieżności tablic dwudzielczych jest zgodny z rozkładem teoretycznym, jakim jest rozkład chi-kwadrat o  $(w-1)(k-1)$  stopniach swobody.

### TESTY NIEZALEŻNOŚCI CECH

Oznaczmy przez  $p_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, w$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ) prawdopodobieństwo łączne zdarzeń — dany element próby będzie miał cechę  $A$  należącą do  $i$ -tej kategorii oraz cechę  $B$  należącą do  $j$ -tej kategorii. Niezależność cech  $A$  i  $B$  oznacza, że dla wszystkich par wskaźników  $i, j$  zachodzi równość (Jóźwiak, Podgórski, 1998):

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \quad (1)$$

gdzie:

$p_{i\bullet}$  — prawdopodobieństwo, że wynik należy do  $i$ -tej kategorii cechy  $A$ ,

$p_{\bullet j}$  — prawdopodobieństwo, że wynik należy do  $j$ -tej kategorii cechy  $B$ .

Nieznane prawdopodobieństwo  $p_{ij}$ ,  $p_{i\bullet}$ ,  $p_{\bullet j}$  obliczamy z następujących relacji:

$$n_{ij} = np_{ij} \quad n_{i\bullet} = np_{i\bullet} \quad n_{\bullet j} = np_{\bullet j} \quad (2)$$

Oczekiwana liczebność podklasy  $(i, j)$  w tablicy dwudzielczej, przy założeniu niezależności cech  $A$  i  $B$ , wynosi:

$$\tilde{n}_{ij} = np_{i\bullet} np_{\bullet j} \quad (3)$$

stąd ostatecznie:

$$\tilde{n}_{ij} = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n} \quad i=1, 2, \dots, w; \quad j=1, 2, \dots, k \quad (4)$$

Uwzględniając powszechnie znany wzór na statystykę  $\chi^2$ , stosowaną w przypadku zmiennej jednowymiarowej, otrzymujemy:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}} \quad (5)$$

Gdy hipoteza zerowa  $H_0$  jest słuszna, statystyka  $\chi^2$  ma rozkład chi-kwadrat z  $(k-1)(w-1)$  stopniami swobody i jest miarą rozbieżności pomiędzy rozkładami zaobserwowanym i hipotetycznym. Na danym poziomie istotności  $\alpha$  oraz wartości krytycznej  $\chi^2_{\alpha, (w-1)(k-1)}$ , testujemy hipotezę  $H_0$  o niezależności cech  $A$  i  $B$ . Jeśli  $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, (w-1)(k-1)}$ , to hipotezę zerową  $H_0$  odrzucamy. Wartości krytyczne  $\chi^2_{\alpha, (w-1)(k-1)}$  wybranych rozmiarów tablic dwudzielczych przedstawiono w tabl. 1.

**TABL. 1. WARTOŚCI KRYTYCZNE  $\chi^2_{\alpha, (w-1)(k-1)}$   
WEDŁUG POZIOMU ISTOTNOŚCI  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$**

| Rozmiary tablic | Liczba stopni swobody | Poziom istotności |        |        |
|-----------------|-----------------------|-------------------|--------|--------|
|                 |                       | 0,01              | 0,05   | 0,1    |
| 2×2 .....       | 1                     | 6,635             | 3,841  | 2,705  |
| 4×2 .....       | 3                     | 11,345            | 7,815  | 6,251  |
| 3×3 .....       | 4                     | 13,277            | 9,488  | 7,779  |
| 8×2 .....       | 7                     | 18,475            | 14,067 | 12,017 |
| 4×4 .....       | 9                     | 21,666            | 16,919 | 14,684 |

Źródło: opracowanie własne.

W przedstawionym teście niezależności liczebność próby musi być dostatecznie duża, a ponadto zakres wartości cech  $A$  i  $B$  musi być tak podzielony na grupy, aby w każdej komórce tablicy znalazła się możliwie duża liczba obserwacji. Nie ma jednak jednego kryterium służącego osiągnięciu tego celu, w literaturze spotyka się różne wartości określające minimalną liczebność komórek w tablicy dwudzielczej. M. Sobczyk (1996) uważa, że wzór (5) może być stosowany, gdy liczebność empiryczna spełnia nierówność  $n_{ij} \geq 5$ , natomiast W. Oktaba (1974) proponuje, by liczebność oczekiwana  $\tilde{n}_{ij}$  była nie mniejsza niż 10. Autor artykułu przeprowadził badania empiryczne uwzględniając warunek  $\tilde{n}_{ij} \geq 5$  dla każdego  $i=1, 2, \dots, w$  oraz  $j=1, 2, \dots, k$  proponowany przez J. Jóźwiak oraz J. Podgórskiego (1998).

W przypadku tablicy  $2 \times 2$  uwzględniając warunek  $\tilde{n}_{ij} < 5$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, w\}$  oraz  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  Autor skorzystał z proponowanej poprawki F. Yatesa (1934) i zastosował statystykę:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{(|n_{ij} - \tilde{n}_{ij}| - 0,5)^2}{\tilde{n}_{ij}} \quad (6)$$

Pearson w statystyce (5) użył kwadratu dlatego, aby móc skorzystać z rozkładu chi-kwadrat jako miary rozbieżności. Rozkład ten na mocy centralnego twierdzenia granicznego dąży do standardowego rozkładu normalnego, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Rozkład chi-kwadrat jest także rozkładem zmiennej losowej będącej sumą kwadratów niezależnych zmiennych losowych o standaryzowanym rozkładzie normalnym  $N(0;1)$ . Kwadrat użyty w liczniku wyrażenia (5) powoduje również, że duże rozbieżności między wartościami  $n_{ij}$  i  $\tilde{n}_{ij}$  są jeszcze większe, a małe rozbieżności jeszcze mniejsze. Innym celem jego zastosowania było uniknięcie wzajemnego niwelowania się rozbieżności. Do tego jednak celu zamiast kwadratu odchyłeń można użyć także ich wartości bezwzględnej.

Autor proponuje statystykę określoną jako „modułowa”, w której kwadrat zastąpiono wartością bezwzględną:

$$|\chi| = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{|n_{ij} - \tilde{n}_{ij}|}{\tilde{n}_{ij}} \quad \tilde{n}_{ij} \geq 5 \quad \text{dla każdego } i=1, 2, \dots, w \text{ oraz } j=1, 2, \dots, k \quad (7)$$

Testujemy zatem hipotezę  $H_0$  o niezależności cech  $A$  i  $B$  na poziomie istotności *ex ante*  $\alpha$ . Jeśli  $|\chi| \geq |\chi|_\alpha$  (gdzie  $|\chi|_\alpha$  jest wartością krytyczną testu na

poziomie  $\alpha$ ), to hipotezę zerową odrzucamy. Zagadnieniem wartości krytycznych  $|\chi|_\alpha$  dla proponowanej statystyki modułowej zajmujemy się w dalszej części pracy.

W przypadku tablicy  $2 \times 2$  przy warunku  $\tilde{n}_{ij} < 5$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, w\}$  oraz  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  Autor, wzorując się na poprawce Yatesa (6), proponuje zmodyfikowaną statystykę modułową:

$$|\chi| = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{\|n_{ij} - \tilde{n}_{ij}|-0,5|}{\tilde{n}_{ij}} \quad (8)$$

Znając wartość statystyki opisanej wzorami (5)—(8) według różnej liczebności próby  $n$  można wyznaczyć moc testu  $m$ , czyli prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej  $H_0$  o niezależności cech, gdy nie jest ona prawdziwa:

$$m = \frac{r-u}{r} \quad (9)$$

gdzie  $u$  określa liczbę tych spośród  $r$  wszystkich możliwych przypadków, kiedy wartość statystyki jest mniejsza od wartości krytycznej.

Realizacja arkuszowa testu  $|\chi|$  niezależności cech jest podobna do implementacji komputerowej testu  $\chi^2$ , którą przedstawiono dokładnie w pracy P. Sulewskiego (2006).

#### WARTOŚCI KRYTYCZNE DLA STATYSTYKI MODUŁOWEJ

Wartości krytyczne dla danej liczebności próby  $n$  wyznaczono odwołując się do oszacowań kwantyli, którymi są wartości stosownych statystyk pozycyjnych (David, 1970). W sytuacji kiedy hipoteza zerowa o braku związku między cechami  $A$  i  $B$  jest słuszna, wyznaczono 10 tys. danych wartości statystyki  $|\chi|$  i za wartość krytyczną przyjęto  $k$ -tą statystykę pozycyjną  $|\chi|_k$ , gdzie  $k = \text{int}[10000 \cdot (1 - \alpha)]$ .

Tablica 2 przedstawia wartości krytyczne tablicy  $2 \times 2$  na poziomie istotności  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$ , gdy liczebność prób jest mała, a mianowicie  $n \in \{6; 10; 14\}$ . Do ich wyznaczenia wykorzystano statystykę (8). Dla wybranych rozmiarów tablic dwudzielczych w tabl. 3—5 przedstawiono wartości krytyczne według różnej liczebności prób, do wyznaczenia których skorzystano ze statystyki (7).

**TABL. 2. WARTOŚCI KRYTYCZNE TABLICY 2×2**

| <i>n</i> | Poziom istotności |       |       |
|----------|-------------------|-------|-------|
|          | 0,01              | 0,05  | 0,1   |
| 6 .....  | 2,880             | 2,813 | 1,500 |
| 10 ..... | 2,579             | 1,905 | 1,389 |
| 14 ..... | 2,297             | 1,735 | 1,244 |

Ź r ó d ł o: jak przy tabl. 1.

**TABL. 3. WARTOŚCI KRYTYCZNE  $|\chi|_{\alpha}$  WEDŁUG POZIOMU ISTOTNOŚCI**

| <i>n</i>                          | Rozmiary tablicy |       |       |       |       |
|-----------------------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|
|                                   | 2×2              | 3×3   | 4×4   | 4×2   | 8×2   |
| <b><math>\alpha = 0,01</math></b> |                  |       |       |       |       |
| 25 .....                          | 2,133            | x     | x     | x     | x     |
| 50 .....                          | 1,485            | 4,005 | x     | 3,354 | x     |
| 75 .....                          | 1,211            | 3,307 | x     | 2,817 | x     |
| 100 .....                         | 1,040            | 2,862 | 6,233 | 2,385 | x     |
| 150 .....                         | 0,851            | 2,327 | 5,164 | 1,979 | 4,867 |
| 250 .....                         | 0,658            | 1,751 | 4,016 | 1,504 | 3,753 |
| 500 .....                         | 0,465            | 1,252 | 2,821 | 1,069 | 2,636 |
| 1000 .....                        | 0,324            | 0,884 | 1,979 | 0,758 | 1,834 |
| <b><math>\alpha = 0,05</math></b> |                  |       |       |       |       |
| 25 .....                          | 1,483            | x     | x     | x     | x     |
| 50 .....                          | 1,130            | 3,354 | x     | 2,800 | x     |
| 75 .....                          | 0,910            | 2,802 | x     | 2,304 | x     |
| 100 .....                         | 0,798            | 2,416 | 5,515 | 1,987 | x     |
| 150 .....                         | 0,639            | 1,958 | 4,533 | 1,621 | 4,260 |
| 250 .....                         | 0,504            | 1,499 | 3,490 | 1,242 | 3,255 |
| 500 .....                         | 0,351            | 1,058 | 2,452 | 0,879 | 2,276 |
| 1000 .....                        | 0,249            | 0,754 | 1,729 | 0,621 | 1,613 |
| <b><math>\alpha = 0,1</math></b>  |                  |       |       |       |       |
| 25 .....                          | 1,438            | x     | x     | x     | x     |
| 50 .....                          | 0,962            | 3,033 | x     | 2,524 | x     |
| 75 .....                          | 0,781            | 2,524 | x     | 2,069 | x     |
| 100 .....                         | 0,648            | 2,178 | 5,125 | 1,782 | x     |
| 150 .....                         | 0,533            | 1,777 | 4,208 | 1,444 | 3,888 |
| 250 .....                         | 0,416            | 1,354 | 3,236 | 1,108 | 2,996 |
| 500 .....                         | 0,293            | 0,965 | 2,281 | 0,781 | 2,094 |
| 1000 .....                        | 0,208            | 0,680 | 1,609 | 0,553 | 1,478 |

Ź r ó d ł o: jak przy tabl. 1.

### *ZDOLNOŚĆ TABLICY DO WYKRYWANIA ZWIĄZKU MIĘDZY CECHAMI*

W celu zbadania zdolności tablicy dwudzielczej do wykrywania związku między cechami zaproponowano taką wartość prawdopodobieństwa  $p_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, w$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ ), aby uzyskać żadaną wartość współczynnika korelacji (zestawienie). Wielkości te odegrały kluczową rolę w tworzeniu tablic 2×2 metodą „słupkową” (Sulewski, 2007).

**ZESTAWIENIE WARTOŚCI PRAWDOPODOBIENSTW  $p_{ij}$   
WEDŁUG RÓŻNYCH WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA KORELACJI**

| Korelacja = 0,1 |       |       | Korelacja = 0,2 |       |       |
|-----------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|
| $p_{ij}$        | 1     | 2     | $p_{ij}$        | 1     | 2     |
| 1 .....         | 0,241 | 0,194 | 1 .....         | 0,290 | 0,168 |
| 2 .....         | 0,256 | 0,308 | 2 .....         | 0,235 | 0,308 |
| Korelacja = 0,3 |       |       | Korelacja = 0,4 |       |       |
| $p_{ij}$        | 1     | 2     | $p_{ij}$        | 1     | 2     |
| 1 .....         | 0,345 | 0,142 | 1 .....         | 0,379 | 0,120 |
| 2 .....         | 0,211 | 0,303 | 2 .....         | 0,182 | 0,319 |
| Korelacja = 0,6 |       |       | Korelacja = 0,8 |       |       |
| $p_{ij}$        | 1     | 2     | $p_{ij}$        | 1     | 2     |
| 1 .....         | 0,476 | 0,064 | 1 .....         | 0,569 | 0,008 |
| 2 .....         | 0,136 | 0,324 | 2 .....         | 0,093 | 0,330 |

Źródło: jak przy tabl. 1.

Dla danej liczebności próby  $n$  na poziomie istotności  $\alpha=0,05$  obliczono  $r=1000$  razy wartość statystyki testowej  $\chi^2$  i  $|\chi|$  oraz wyznaczono moc testów. Uzyskane wyniki porównano ze sobą za pomocą testu o równości prawdopodobieństwa stawiając hipotezę zerową, że moc testów jest równa. Uzyskane wyniki dla różnych rozmiarów tablic dwudzielczych zawierają tabl. 4—8 oraz wykr. 1—6.

**TABL. 4. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 2×2, GDY  $n \in \{6; 10; 14\}$**

| Korelacja | $n$ | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|-----|----------|----------|-----------------|
| 0,2       | 6   | 0        | 0,038    | odrzucona       |
|           | 10  | 0,007    | 0,066    | odrzucona       |
|           | 14  | 0,026    | 0,084    | odrzucona       |
| 0,4       | 6   | 0        | 0,058    | odrzucona       |
|           | 10  | 0,033    | 0,181    | odrzucona       |
|           | 14  | 0,135    | 0,308    | odrzucona       |
| 0,6       | 6   | 0        | 0,087    | odrzucona       |
|           | 10  | 0,100    | 0,431    | odrzucona       |
|           | 14  | 0,398    | 0,610    | odrzucona       |
| 0,8       | 6   | 0        | 0,139    | odrzucona       |
|           | 10  | 0,342    | 0,783    | odrzucona       |
|           | 14  | 0,744    | 0,941    | odrzucona       |

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 5. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 2×2**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|----------|-----------------|
| 0,1       | 25   | 0,073    | 0,109    | odrzucona       |
|           | 50   | 0,108    | 0,110    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,140    | 0,146    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,187    | 0,183    | nieodrzucona    |
|           | 150  | 0,211    | 0,218    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,364    | 0,360    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,600    | 0,610    | nieodrzucona    |
|           | 1000 | 0,880    | 0,883    | nieodrzucona    |
| 0,2       | 25   | 0,167    | 0,220    | odrzucona       |
|           | 50   | 0,327    | 0,313    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,395    | 0,389    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,490    | 0,487    | nieodrzucona    |
|           | 150  | 0,673    | 0,682    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,866    | 0,866    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,997    | 0,998    | nieodrzucona    |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,3       | 25   | 0,319    | 0,374    | odrzucona       |
|           | 50   | 0,595    | 0,570    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,753    | 0,759    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,865    | 0,859    | nieodrzucona    |
|           | 150  | 0,965    | 0,966    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,999    | 0,999    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |

**TABL. 5. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|z|$  WEDŁUG TABLICZY 2×2 (dok.)**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ z $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|-------|-----------------|
| 0,4       | 25   | 0,508    | 0,586 | odrzucona       |
|           | 50   | 0,852    | 0,843 | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,952    | 0,952 | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,985    | 0,984 | nieodrzucona    |
|           | 150  | 0,997    | 0,998 | nieodrzucona    |
|           | 250  | 1        | 1     | x               |
|           | 500  | 1        | 1     | x               |
|           | 1000 | 1        | 1     | x               |

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 6. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|z|$  WEDŁUG TABLICZY 3×3**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ z $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|-------|-----------------|
| 0,1       | 50   | 0,074    | 0,081 | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,107    | 0,103 | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,130    | 0,127 | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,266    | 0,261 | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,506    | 0,485 | nieodrzucona    |
|           | 1000 | 0,842    | 0,821 | nieodrzucona    |

**TABL. 6. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 3×3 (dok.)**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|----------|-----------------|
| 0,2       | 50   | 0,195    | 0,189    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,297    | 0,297    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,394    | 0,388    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,832    | 0,829    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,989    | 0,986    | nieodrzucona    |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,3       | 50   | 0,391    | 0,375    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,613    | 0,602    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,751    | 0,747    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,994    | 0,996    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,4       | 50   | 0,653    | 0,637    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,876    | 0,846    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,951    | 0,952    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 1        | 1        | x               |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 7. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 4×4**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|----------|-----------------|
| 0,1       | 150  | 0,150    | 0,140    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,245    | 0,204    | odrzucona       |
|           | 500  | 0,532    | 0,428    | odrzucona       |
|           | 1000 | 0,863    | 0,788    | odrzucona       |
| 0,2       | 150  | 0,505    | 0,438    | odrzucona       |
|           | 250  | 0,824    | 0,742    | odrzucona       |
|           | 500  | 0,992    | 0,973    | odrzucona       |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,3       | 150  | 0,903    | 0,844    | odrzucona       |
|           | 250  | 0,991    | 0,983    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,4       | 150  | 0,991    | 0,981    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 1        | 1        | x               |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 8. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 4×2**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|----------|-----------------|
| 0,1       | 50   | 0,095    | 0,103    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,113    | 0,113    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,149    | 0,139    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,279    | 0,257    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,526    | 0,482    | odrzucona       |
|           | 1000 | 0,854    | 0,825    | nieodrzucona    |
| 0,2       | 50   | 0,189    | 0,188    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,305    | 0,284    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,418    | 0,403    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,847    | 0,820    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 0,992    | 0,987    | nieodrzucona    |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,3       | 50   | 0,427    | 0,387    | nieodrzucona    |
|           | 75   | 0,636    | 0,602    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,770    | 0,756    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,997    | 0,993    | nieodrzucona    |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,4       | 50   | 0,694    | 0,634    | odrzucona       |
|           | 75   | 0,891    | 0,873    | nieodrzucona    |
|           | 100  | 0,973    | 0,965    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 1        | 1        | x               |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |

Źródło: jak przy tabl. 1.

**TABL. 9. MOC TESTÓW  $\chi^2$  I  $|\chi|$  WEDŁUG TABLICY 8×2**

| Korelacja | $n$  | $\chi^2$ | $ \chi $ | Hipoteza zerowa |
|-----------|------|----------|----------|-----------------|
| 0,1       | 150  | 0,135    | 0,107    | nieodrzucona    |
|           | 250  | 0,262    | 0,190    | odrzucona       |
|           | 500  | 0,533    | 0,368    | odrzucona       |
|           | 1000 | 0,867    | 0,657    | odrzucona       |
| 0,2       | 150  | 0,526    | 0,351    | odrzucona       |
|           | 250  | 0,800    | 0,598    | odrzucona       |
|           | 500  | 0,995    | 0,946    | odrzucona       |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,3       | 150  | 0,879    | 0,703    | odrzucona       |
|           | 250  | 0,993    | 0,969    | odrzucona       |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |
| 0,4       | 150  | 0,994    | 0,959    | odrzucona       |
|           | 250  | 1        | 1        | x               |
|           | 500  | 1        | 1        | x               |
|           | 1000 | 1        | 1        | x               |

Źródło: jak przy tabl. 1.

## ZGODNOŚĆ Z ROZKŁADEM CHI-KWADRAT

W kolejnej części pracy Autor zajął się porównaniem rzeczywistego rozkładu miar rozbieżności tablic dwudzielczych z rozkładem teoretycznym, jakim jest rozkład chi-kwadrat o  $(w-1)(k-1)$  stopniach swobody. W celu uzyskania gładkiego przebiegu doświadczalnej funkcji gęstości wykorzystano metodę E. Parzena<sup>1</sup>, w której funkcja gęstości składa się z „wkładów”. W artykule wykorzystano wkłady gaussowskie w postaci:

$$K_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-t_i^*}{h} \right)^2 \right] \quad (10)$$

Z równania (10) wynika, że doświadczalna funkcja gęstości zbudowana jest z „wkładów” postawionych na osi czasu w tych miejscach, gdzie leży realizacja  $t_{(i)}^*$  ( $i=1, \dots, n$ ) i przyjmuje postać:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-t_{(i)}^*}{h} \right)^2 \right] \quad (11)$$

Parametr skali „wkładu”  $h$  jest funkcją liczności próby:

$$h(n) = 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \sqrt{\frac{S_2^* - S_1^{*2}}{n}} \quad (12)$$

gdzie

$$S_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i)}^* \quad S_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i)}^{*2} \quad (13)$$

Jeżeli hipoteza zerowa jest słuszna, to niezależnie od rozmiaru tablicy dwudzielczej wraz ze wzrostem liczebności próby rośnie zgodność miary rozbieżności  $\chi^2$  z rozkładem chi-kwadrat o  $(w-1)(k-1)$  stopniach swobody. W przypadku miary rozbieżności  $|\chi|$  dla tablic dwudzielczych taka zgodność nie ma miejsca. Fakt ten potwierdzają wykresy 7—12.

---

<sup>1</sup> Parzen E. (1962), s. 1065—1076.







## Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że analiza prób uwidacznia zdolność tablicy dwudzielczej do wykrywania związku między badanymi cechami. W sytuacji gdy hipoteza zerowa o niezależności cech nie jest słuszna, moc testu rośnie wraz ze wzrostem liczności próby oraz ze wzrostem współczynnika korelacji.

Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że test niezależności wykorzystujący statystykę modułową tablicy  $2 \times 2$  ma większą moc niż powszechnie znany test wykorzystujący statystykę  $\chi^2$ . Przewaga ta jest szczególnie widoczna w przypadku małych prób, kiedy do obliczenia mocy testów stosowana jest statystyka z poprawką Yatesa. Pozostałe tablice symetryczne pokazały wartości zbliżone. Wraz ze wzrostem asymetryczności tablicy test wykorzystujący statystykę  $\chi^2$ , szczególnie przy mniejszej liczebności próby, wykazuje większą moc niż test wykorzystujący statystykę modułową  $|\chi|$ .

Jeżeli hipoteza zerowa jest słuszna, to niezależnie od rozmiaru tablicy zachodzi zgodność między rzeczywistym rozkładem miary rozbieżności  $\chi^2$  tablic dwudzielczych a rozkładem chi-kwadrat o  $(w-1)(k-1)$  stopniach swobody. W przypadku miary rozbieżności, jaką jest proponowana przez Autora statystyka modułowa  $|\chi|$ , taka zgodność nie występuje. Rozkład modułowej miary rozbieżności na tyle odbiega od rozkładu chi-kwadrat, że nie można powszechnie dostępnych tablic kwantyli tego rozkładu wykorzystać do wyznaczania wartości krytycznej. Nie jest to jakaś sytuacja wyjątkowa. Trudno dostępne są wciąż tablice do wyznaczania wartości krytycznej według testów zgodności Lillieforsa, Renyi'ego czy Mizesa-Smirnowa.

Teoretyczny rozkład statystyki modułowej musi być wyznaczany metodami symulacyjnymi. Dotyczy to głównie wartości krytycznej niezbędnej do podejmowania decyzji na podstawie analizowanego testu.

---

dr Piotr Sulewski — Akademia Pomorska w Słupsku

## LITERATURA

- David H. A. (1970), *Order statistics*, Wiley, New York
- Józwiak J., Podgórski J. (1998), *Statystyka od podstaw*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa
- Oktaba W. (1974), *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, PWN, Warszawa
- Parzen E. (1962), *On estimation of a probability density and mode*, „The Annals Mathematical Statistics”, Vol. 33, No. 3
- Sobczyk M. (1996), *Statystyka*, PWN, Warszawa

- Sulewski P. (2006), *Test niezależności dwóch cech realizowany za pomocą tablicy dwudzielczej*, „Śląskie Prace Matematyczno-Fizyczne”, nr 4, Śląsk
- Sulewski P. (2007), *Moc tablicy dwudzielczej jako test niezależności*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 6, GUS
- Yates F. (1934), *Contingency table involving small numbers and the  $\chi^2$  test*, „Journal of the Royal Statistical Society” (Supplement), No. 1

## SUMMARY

*This paper proposes a modification of the classic test of independence chi-square involving the use of modular statistics, as a measure of discrepancy between the observed and hypothetical distribution. Module statistics differs from Pearson chi-square statistics that deviation square of the theoretical and expected empirical probability is replaced by absolute value. For the proposed statistics is given the critical value  $|\chi|_\alpha$  by different size samples of significance  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$ . The ability of two-part tables was examined to detect a relationship between characteristics, defined as the power of the test as well as the results were compared with the power of the test of independence, using statistics by  $\chi^2$  z  $(k-1)(w-1)$  degrees of freedom. The Author examined whether the distribution of discrepancy measurements of two-part tables is consistent with the theoretical distribution of chi-square by  $\chi^2$  z  $(k-1)(w-1)$  degrees of freedom. Their usefulness in statistical practice was indicated too.*

## РЕЗЮМЕ

*В статье была предложена модификация классического теста независимости х-квадрат, заключающаяся в использовании модульной статистики в качестве меры расхождений между наблюдаемым и гипотетическим распределением. Модульная статистика отличается от статистики х-квадрат Пирсона тем, что квадрат теоретической и ожидаемой эмпирической вероятности был заменен абсолютной величиной. Для предлагаемой статистики была принята критическая величина  $|\chi|_\alpha$  по разным размерам выборки со значимостью  $\alpha \in \{0,01; 0,05; 0,1\}$ . Была обследована также способность двусторонних таблиц к обнаруживанию соотношений между особенностями, определяемая как сила теста, а также были сопоставлены полученные результаты с силой теста независимости, используемого статистику  $\chi^2$  с  $(k-1)(w-1)$  степенями свободы. Было обследовано является ли распределение мер расхождений двусторонних таблиц соответственным теоретическому распределению х-квадрат со  $(w-1)(k-1)$  степенями свободы. Была указана возможность их применения в статистической практике.*